Szemirelativisztikus Magnetohidrodinamika

Tóth Gábor

ELTE, TTK, Atomfizikai Tanszék

T. I. Gombosi, K. G. Powell, D. L. De Zeeuw

Univ. of Michigan, Space Research Lab

Ortvay Kollokvium

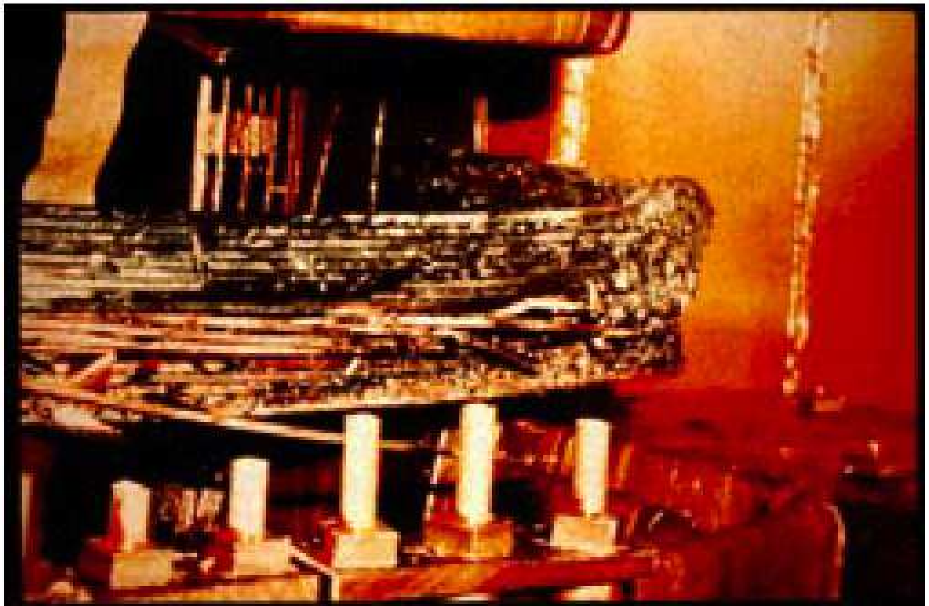
Budapest, szeptember 27, 2001

Űridőjárás

- **Meghatározás**
  - A nap, napszél, magnetoszféra és ionoszféra állapota, mely hatással van az űrbeli és földfelszíni eszközökre, illetve az emberi életre és egészségre veszélyes lehet.

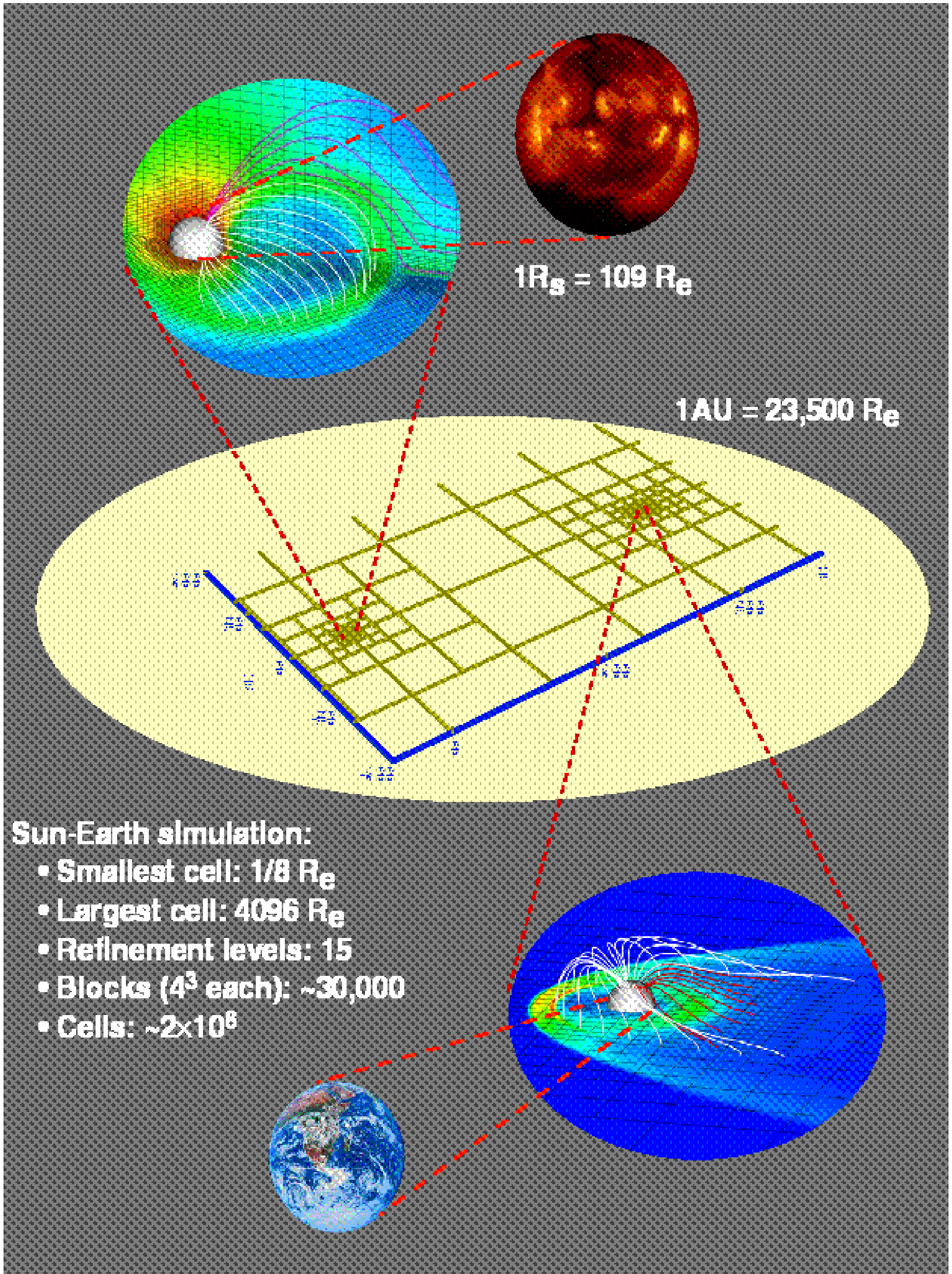
- **Jelenségek:**
  - napkitörés, CME
  - nagyenergiájú részecskék
  - sarki fény
  - mágneses viharok

- **Hatások:**
  - űrhajósok, pilóták
  - űrszondák, műholdak
  - kommunikációs rendszerek
  - elektromos hálózatok



Geomagnetically induced currents from the flare events of March 1989 caused this $26 million transformer at the New Jersey PSC to meltdown

Nap-Föld szimuláció



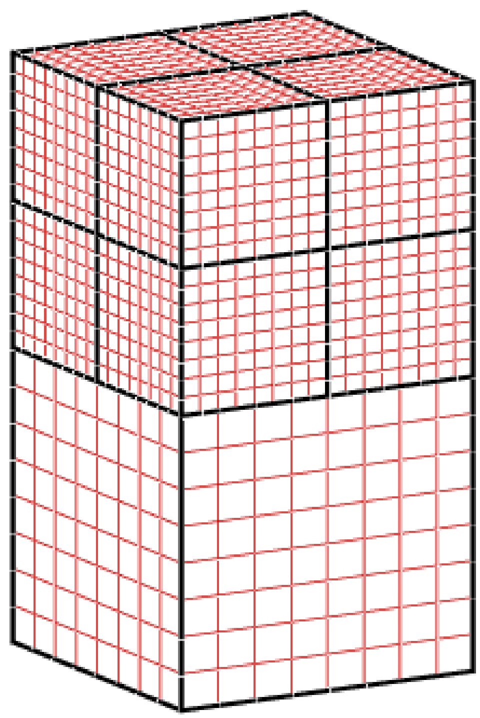
BATS-R-US

Block Adaptive-Tree Solar-Wind Roe Upwind Scheme

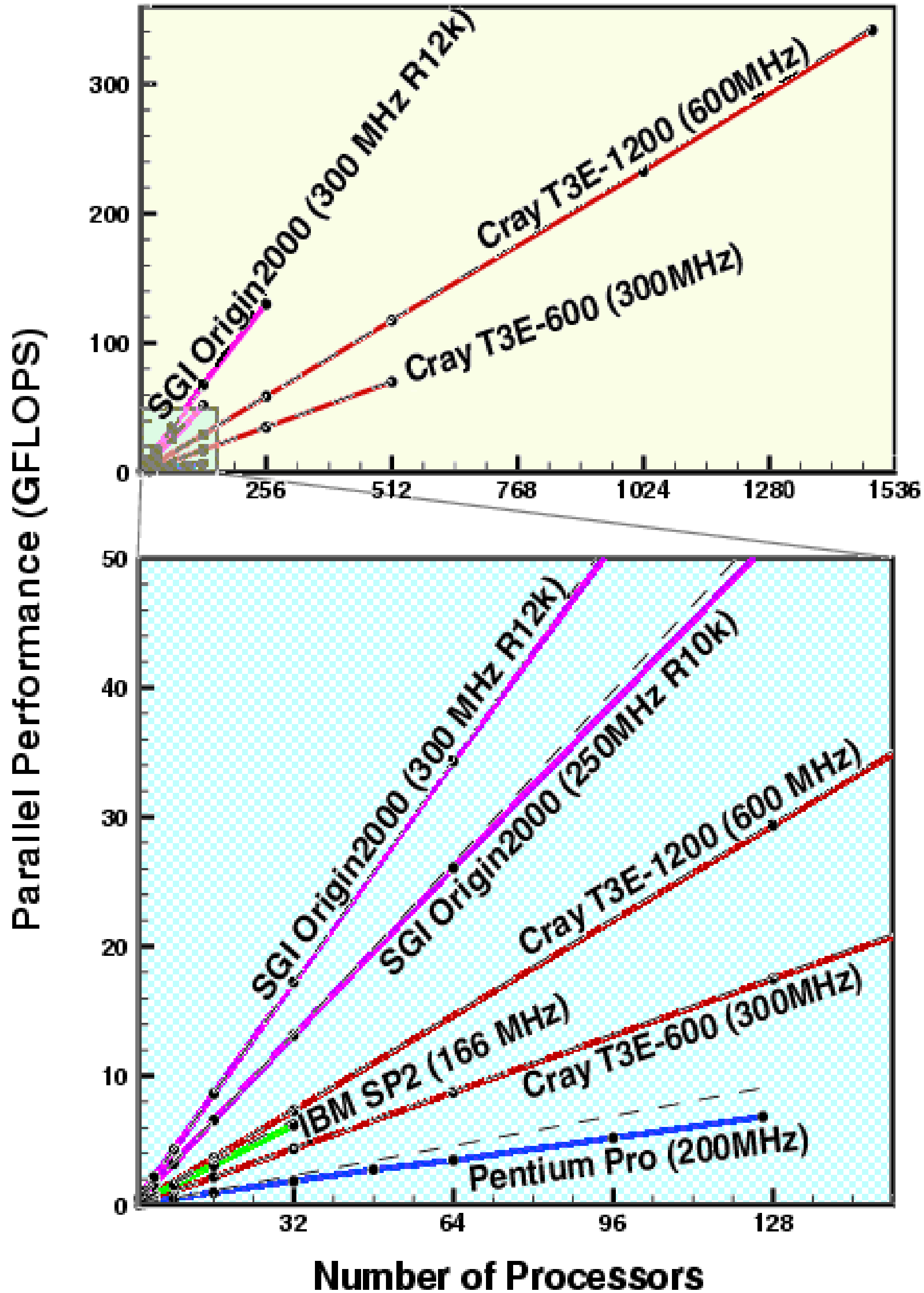
- **Jellemzők**
  - Nagy felbontású térbeli diszkretizáció
  - Explicit időbeli diszkretizáció
  - Block adaptív rács

- **Implementáció:**
  - Fortran 90 és MPI
  - Kb. 50.000 sor

- **Parallelizáció:**
  - önhasonló blokkok
  - egyenletes munkaelosztás
  - 345 GFlop 1490 processzoron



Parallel hatékonyság



Motiváció

- **Fizikai megfontolások**
  - Alfvén sebesség
    $$V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$$
    megközelíti a fénysebességet a Föld mágneses pólusainál
  - A magnetoszféra dinamikájának időskálája perc nagyságrendű
- **Numerikus megfontolások**
  - A pólusoknál a szükséges rácsfelbontás $\Delta x = 100 - 1500\,km$
  - Az Δt időlépést korlátozza a CFL stabilitási feltétel:
    $$\Delta t < \Delta x / V_A$$
    explicit algoritmusokra, ami milliszekundumos időlépést ad.
- **Konklúzió**
  - Az egyszerű megközelítés nem hatékony!

Alfvén sebesség

- **Klasszikus Alfvén sebesség:**

$$V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$$

- V_A/c **értékei a Naprendszerben:**

Mágneses sarki övezet	V_A/c
Föld	~ 0.1
Szaturnusz	~ 1
Jupiter	~ 10

A klasszikus MHD nem érvényes az erős mágneses terű bolygókra!

- **Megoldás:** Tartsuk meg az eltolási áramot az Ampère törvényben:

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

Az u áramlási sebesség és az a_s hangsebesség nem relativisztikus

Szemirelativisztikus MHD egyenletek

- A szemirelativisztikus MHD a klasszikus hidrodinamika és a relativisztikus elektrodinamika kombinációja. Az eltolási áram megtartásával a következő megmaradási törvényeket kapjuk:

$$\partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

ahol a megmaradó változók

$$\mathbf{W} = \left[\rho, \rho\mathbf{u} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \mathbf{B}, \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\left(B^2 + \frac{1}{c^2}E^2\right) \right]^T$$

és a fluxusok

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho\mathbf{u} \\ \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + \left(p + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2c^2}E^2\right)\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}\mathbf{E} \\ \mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma-1} + p\right) + \mathbf{E} \times \mathbf{B} \end{bmatrix}^T$$

továbbá

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

A fénysebesség mesterséges csökkentése

- **Stacionárius problémák**
  - Az eltolási áram nulla az egyensúlyi megoldásra. Azonban c a töltéssűrűségre ható elektromos erőben is szerepel! Így az impulzus megmaradási egyenletben megjelenik egy új tag:

$$\partial_t \left[\rho \mathbf{u} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\right] + \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2}\right)\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{E}$$

    ahol c_0 az igazi, míg c a csökkentett fénysebesség.

- **Időfüggő megoldások**
  - c csökkentése nagyobb időlépéseket tesz lehetővé
  - c-nek mindenképpen nagyobbnak kell lenni mint u és a_s
  - *A módosított egyenletek módosítják a fizikát?!*

Karakterisztikus egyenletek

A karakterisztikus egyenletet a Mathematica program és sok türelem felhasználásával vezettük le. A λ hullámsebességek a

$$(\lambda - u_x)^2 \, P_2(\lambda) \, P_4(\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.
A szemirelativisztikus Alfvén hullámok sebességei a

$$P_2 = \lambda \, (\lambda - u_x) + \gamma_A^2 \left[\lambda \, u_\parallel \, b_x \frac{V_A^2}{c^2} - u_x \, (\lambda - u_x) - V_A^2 \, b_x^2 \right]$$

míg a gyors és lassú magnetoszonikus hullámok a

$$P_4 = \left[(\lambda - u_x)^4 - a^2 (\lambda - u_x)^2 \right] - (c^2 - \lambda^2) \frac{V_A^2}{c^2} \left[(\lambda - u_x)^2 - a^2 \, b_x^2 \right]$$

polinom gyökei. Itt $b_x = B_x / |B|$, a a hangsebesség és

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1 + V_A^2 / c^2}}$$

Hullámsebességek

- **Entrópia és divergencia B hullámok:**

$$\lambda_{1,2} = u_x$$

- **Alfvén hullámok**

$$\lambda_{3,4} = \gamma_A^2 \left(u_x + v_{E,x}\right) \pm \sqrt{\gamma_A^2 \left(V_{A,x}^2 - u_x^2\right) + \gamma_A^4 \left(u_x + v_{E,x}\right)^2}$$

ahol $v_{E,x} = (V_A^2/2c^2)u_{\perp,x}$.
Nem szimmetrikus u_x-re! Nem mindig valós, ha $c < c_0$ és $v_A < u_\parallel$!

- **Gyors és lassú hullámok:**
  - Az egzakt analitikus megoldás rendkívül bonyolult
  - Közelítő megoldásokat találtunk, amelyek nem sokkal bonyolultabbak a klasszikus képleteknél
  - A közelítő megoldások hibája néhány százalék
  - *Lassú hullámok szimmetrikusak az áramlásra, a gyors hullámok nem!*

- **Határesetek:**

$$\lim_{V_A^2 \to \infty} c_s^* = a \qquad \lim_{V_A^2 \to \infty} V_A^* = c \qquad \lim_{V_A^2 \to \infty} c_f^* = c$$

Szemirelativisztikus MHD tesztek

- **Relativisztikus Alfvén hullám:** $c = 0.9 < v_{A,x} = 1$

  $\rho = 1,\ u_x = 0.5,\ u_y = 0,\ p = 0.1,\ B_x = B_y = 1,\ B_z = 0$
  $u_z = 0.01$ ha $x < 0$ és $u_z = -0.01$ ha $x > 0$

- **Relativisztikus gyors és lassú hullámok:** $c = 0.9 < c_{f,x} = 1.4509$

  $\rho = 1,\ u_y = u_z = 0,\ p = 0.1,\ B_x = B_y = 1,\ B_z = 0$
  Nincs háttér áramlás: $u_x = 0.01$ ha $x < 0$ és $u_x = -0.01$ ha $x > 0$
  Van háttér áramlás: $u_x = 0.51$ ha $x < 0$ és $u_x = 0.49$ ha $x > 0$

- **Állóhullámok:**

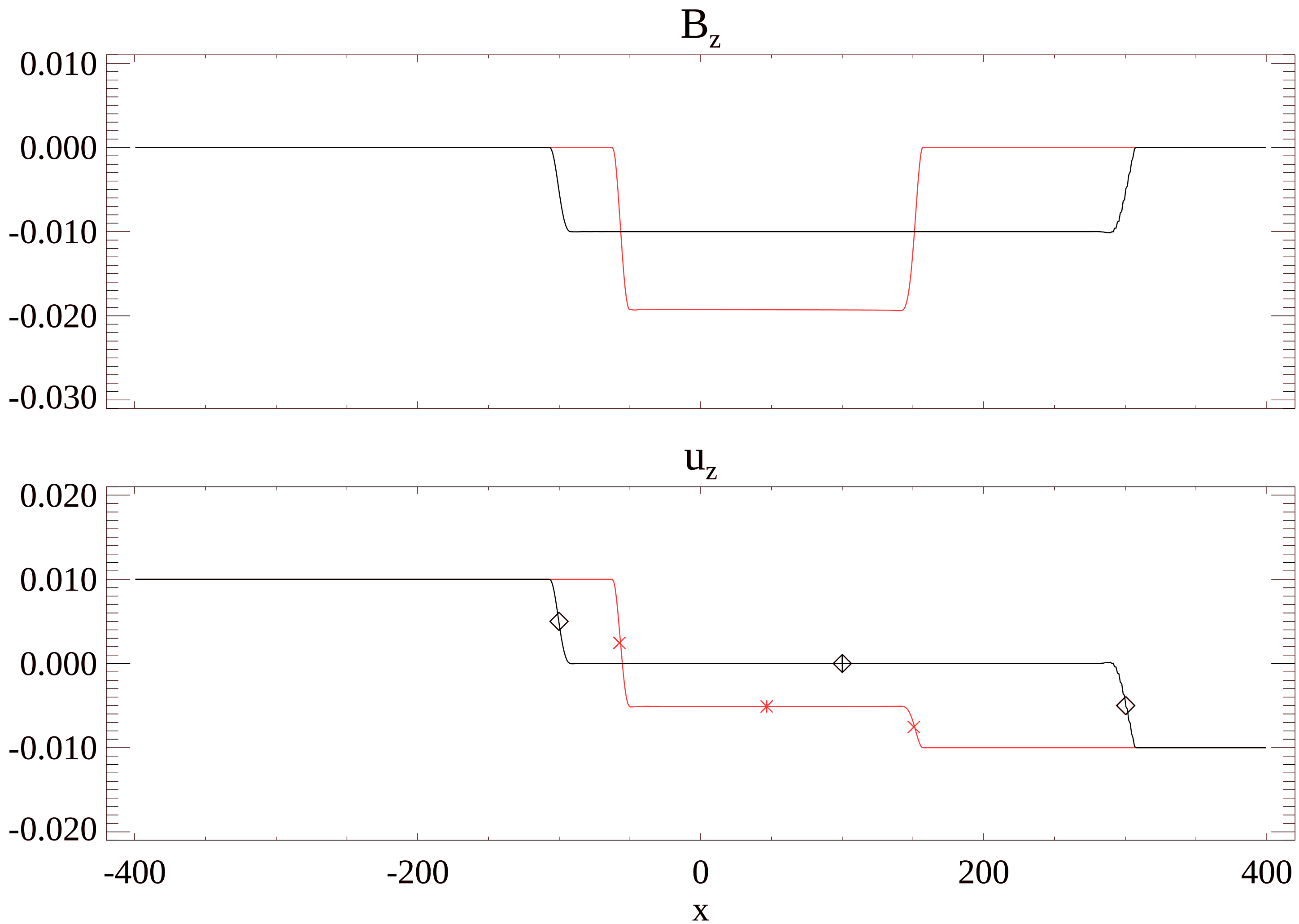
  Ugyanaz mint fent, csak $\bar{u}_x = \pm c_f$ vagy $\bar{u}_x = \pm c_s$ vagy $u_x = \pm v_A$

- **Instabil Alfvén hullám:** $\lambda_{3,4} = 0.572 \pm i0.0336$

  $\rho = 1,\ u_x = 0.6453,\ u_y = -0.4728,\ p = 0.1$
  $B_x = 0.076256,\ B_y = -0.49415,\ B_z = 0$
  $u_z = 0.01$ ha $x < 0$ és $u_z = -0.01$ ha $x > 0$

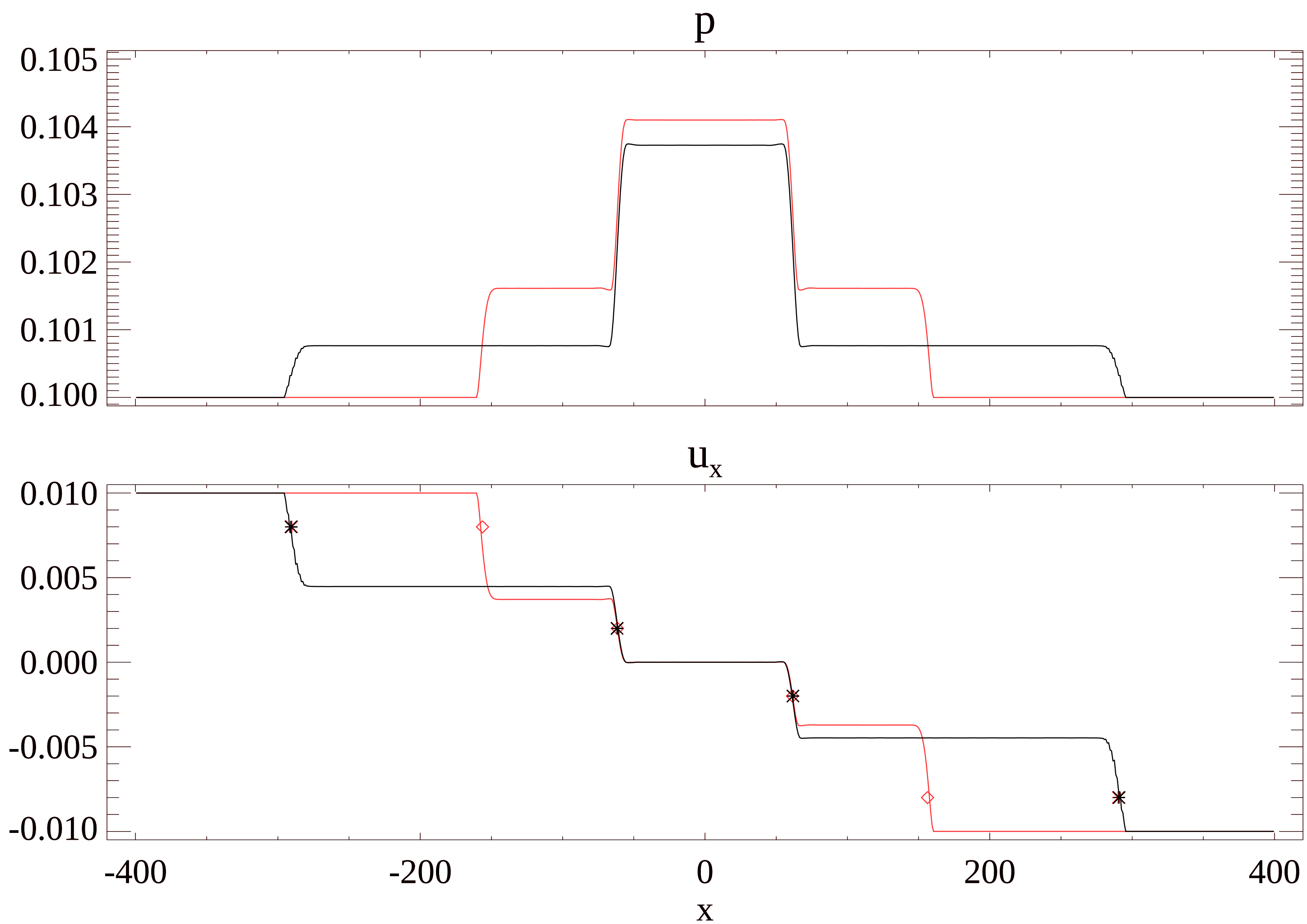
- **Tökéletes egyezés az analitikus képletekkel!**

Alfvén hullám teszt



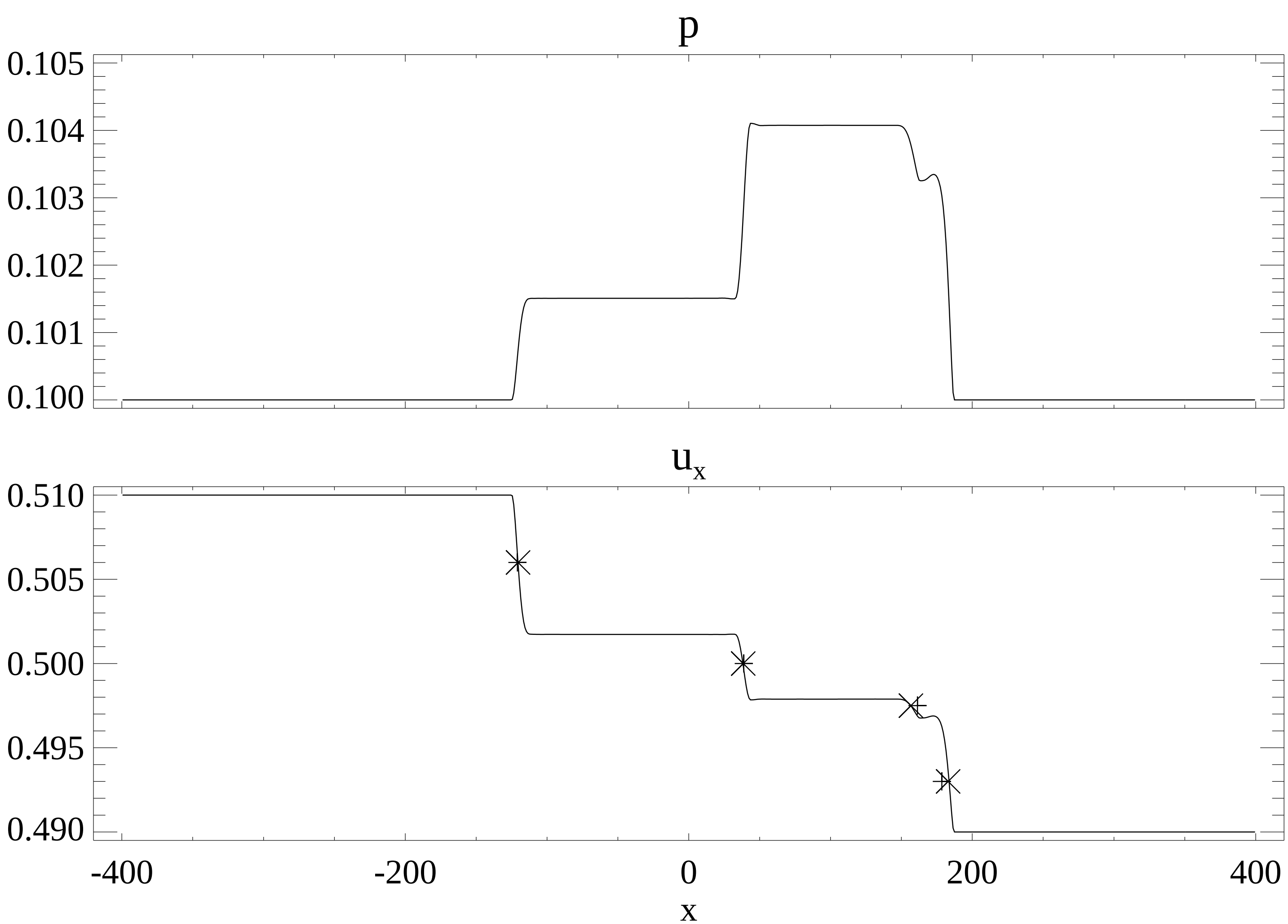
Klasszikus MHD (fekete) és szemirelativisztikus MHD (piros) megoldások $t = 200$-nál

Gyors és lassú hullám teszt



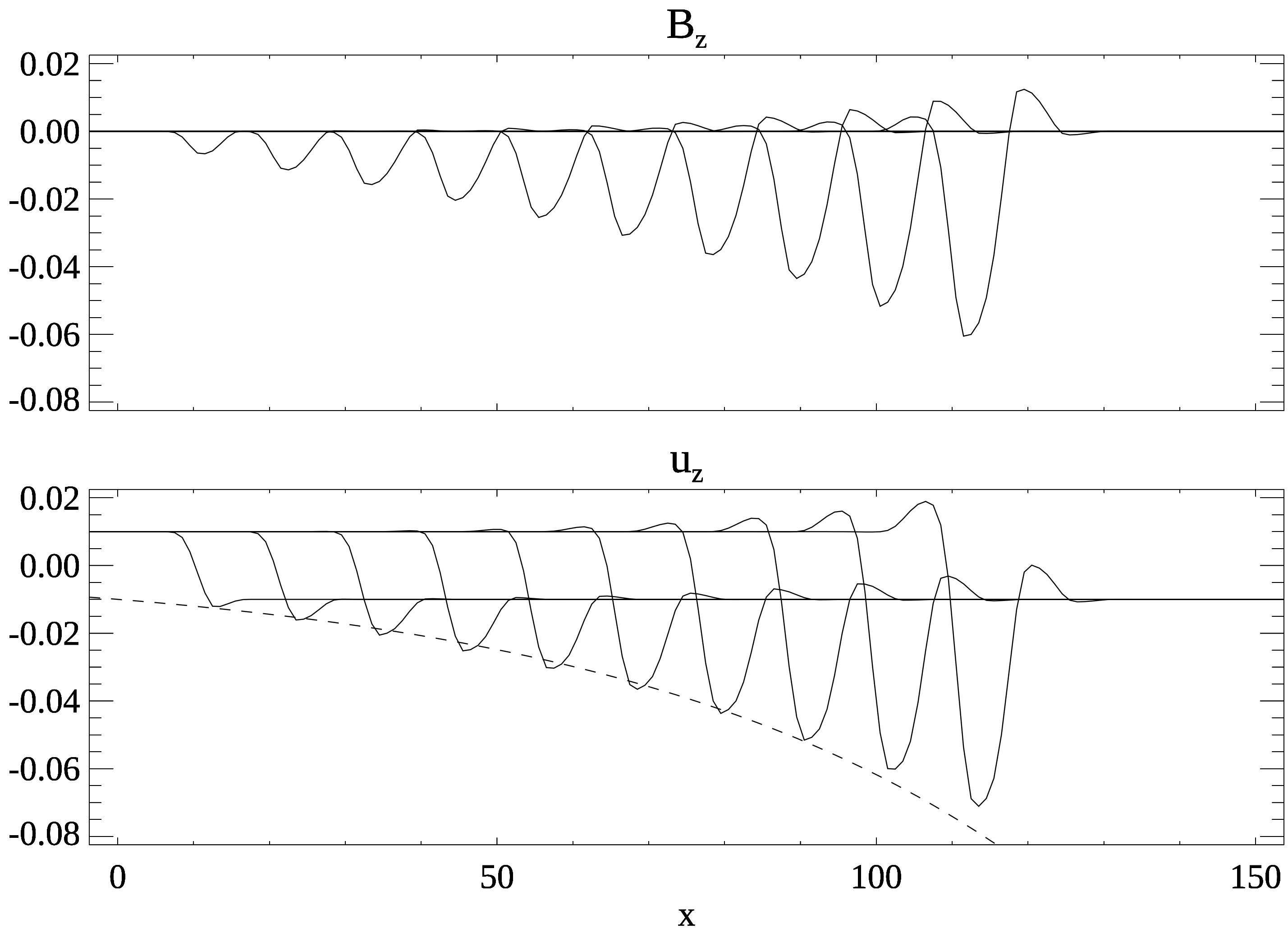
Klasszikus MHD (fekete) és szemirelativisztikus MHD (piros) megoldások $t = 200$-nál

Gyors és lassú hullámok áramlással



Numerikus (−), egzakt (×) és közelítő (+) eredmények

Instabil Alfvén hullám



Jobbra haladó Alfvén hullám $t = 20, 40, \ldots 200$-nál

Implicit időintegrálás

- **Cél**
  - Feltétel nélküli stabilitás
  - Hatékony algoritmus
  - Hatékony párhuzamos futás
- $\partial_t W = -\nabla \cdot \mathbf{F} + S = R$ **egyenlet időbeli diszkretizálása**
  - Olcsó elsőrendű R_{low} diszkretizáció az implicit részben
  - Pontos másodrendű R diszkretizáció az explicit részben
  - Stacionárius problémákhoz fordított Euler módszer:

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \left[R^n + R_{low}^{n+1} - R_{low}^n \right]$$

  - Időfüggő problémákhoz BDF2 módszer:

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t^n \left[\beta (R^n + R_{low}^{n+1} - R_{low}^n) + (1-\beta) \frac{W^n - W^{n-1}}{\Delta t^{n-1}} \right]$$

ahol $\beta = (\Delta t^n + \Delta t^{n-1})/(2\Delta t^n + \Delta t^{n-1}) \approx 2/3$.

Newton-Krylov-Schwarz

- **Newton iteráció**

$$\left[I - \beta \Delta t \frac{\partial R_{low}}{\partial W}\right] \cdot \Delta W = \Delta t \left[\beta R^n + \beta(R^k_{low} - R^n_{low}) + (1-\beta)\frac{W^n - W^{n-1}}{\Delta t^{n-1}}\right] + (W^n - W^k)$$

ahol $\Delta W = W^{k+1} - W^k$ az ismeretlen és $k = 0, 1, ..$ az iteráció indexe

- **Krylov típusú iterációs módszer**

A Jacobi mátrix-szal való szorzásokat mátrix elemek nélkül is kiszámíthatjuk:

$$\frac{\partial R_{low}}{\partial W} \cdot \Delta W = \frac{R_{low}(W^n + \epsilon \Delta W) - R^n_{low}}{\epsilon}$$

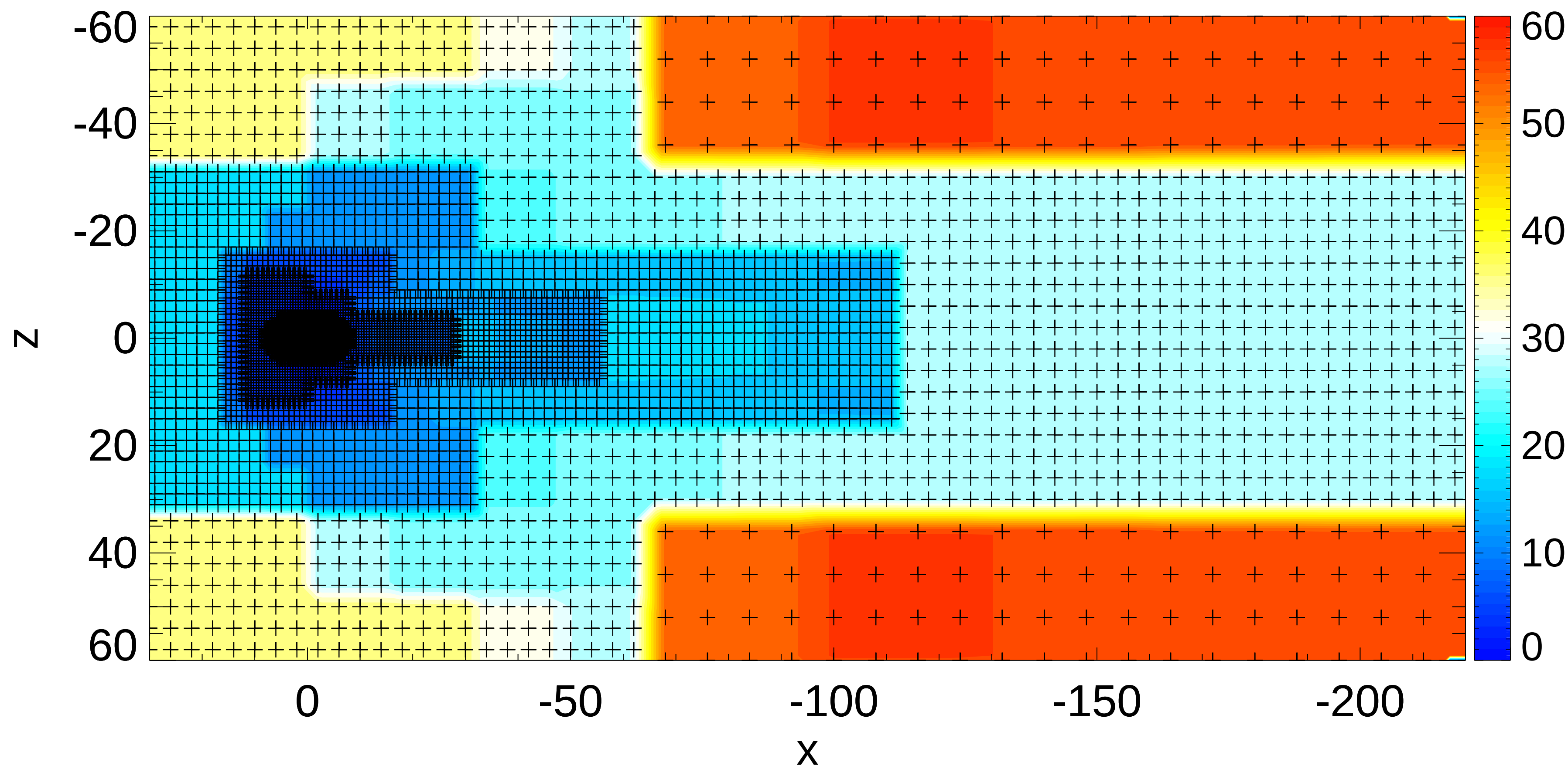
ahol ϵ egy kis paraméter

- **Schwarz típusú prekondícionálás**
  - Az $A \cdot x = b$ egyenlet helyett oldjuk meg a

$$L^{-1} \cdot A \cdot U^{-1} x' = b' = L^{-1} \cdot b$$

egyenletet, ahol $x = U^{-1} \cdot x'$. L és U az A mátrix közelítő LU dekompozíciója.
  - Független MBILU prekondícionálás minden blokkra az adaptív rácsban
  - A blokkok egyszerű Descartes rácsok: egyszerű mátrixok

Az időlépés CFL korlátja másodpercben



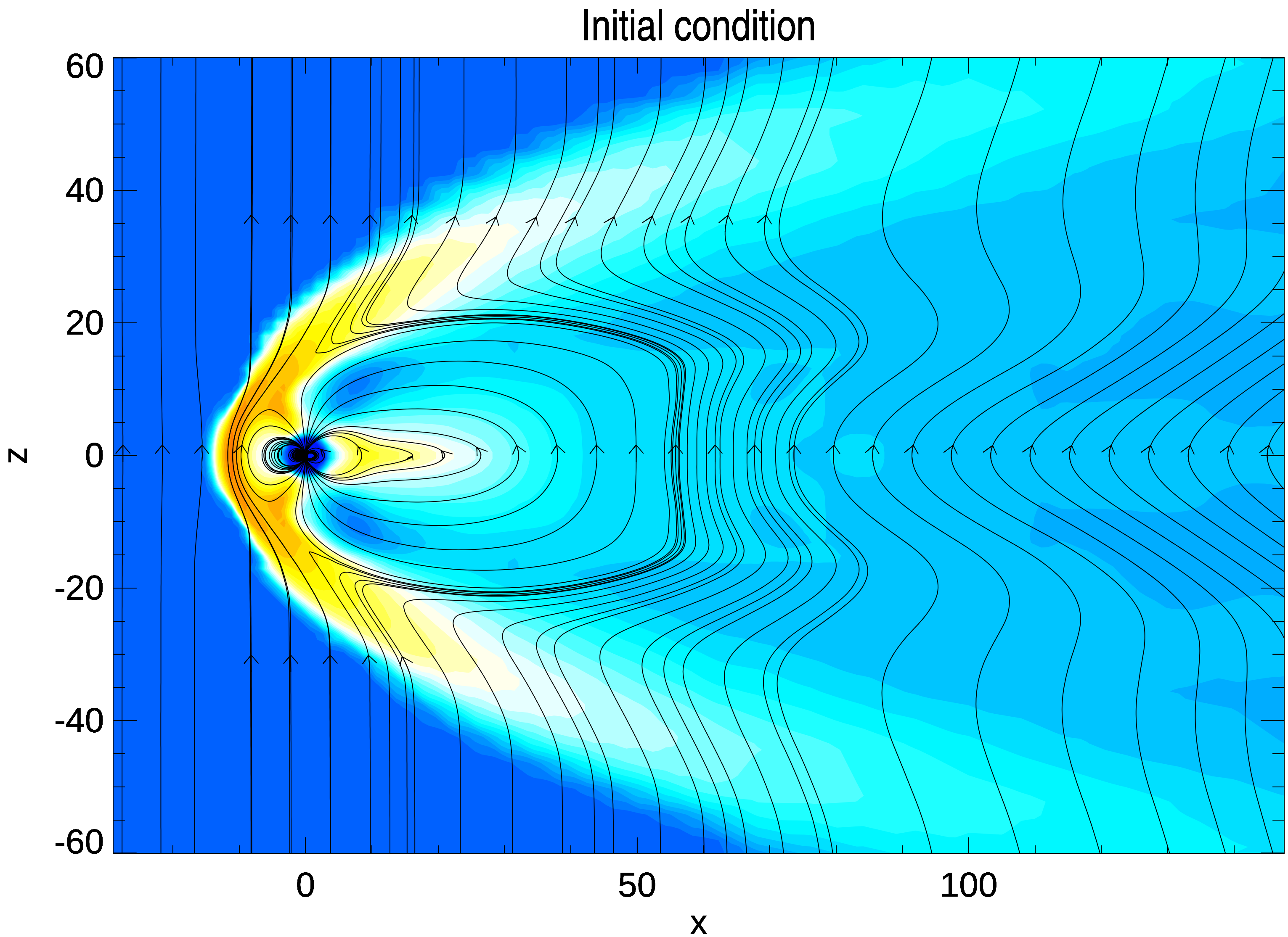
Részben implicit időintegrálás

- **Motiváció**
  - A teljesen implicit módszer feltétel nélkül stabil, de költséges
  - Az explicit módszer olcsó, de CFL feltétel limitált
- **Részben implicit módszer blokk adaptív rácsra**
  i) Explicit és implicit blokkok kiválasztása stabillitási feltétel alapján
  ii) A nem korlátozó CFL feltételű blokkokra explicit integrálás
  iii) A korlátozó CFL feltételű blokkokra implicit integrálás
- **Munkaelosztás párhuzamos gépeken**
  - A blokkokat Peano-Hilbert térkitöltő görbe mentén rendezzük
  - Minden processzor ugyanakkora explicit és implicit darabokat kap a görbéből
  - Jó munkaelosztás és csoportosítás

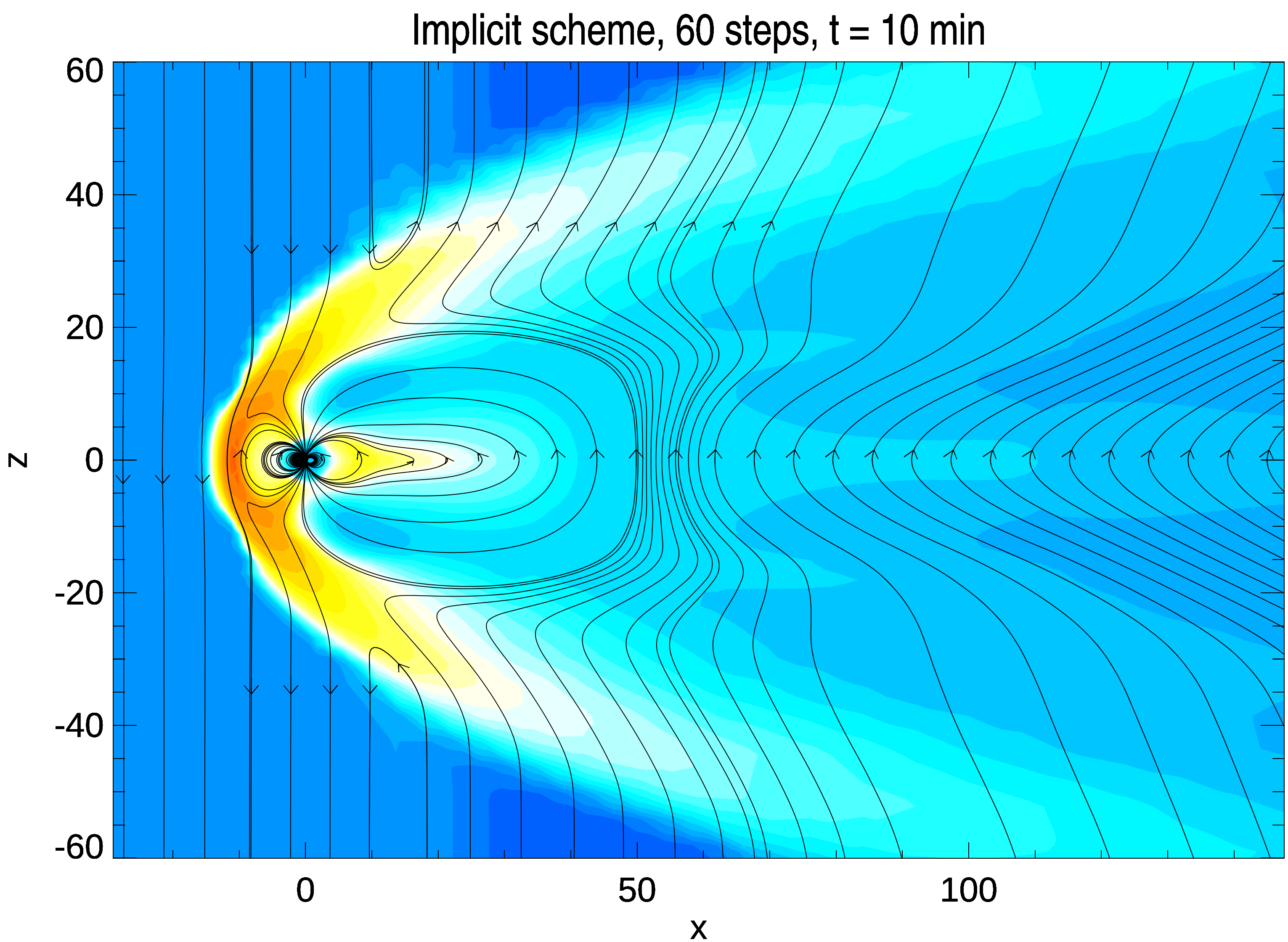
Teszt probléma

- **Paraméterek**
  - Napszél: $v = 500\,\text{km/s}$, $\rho = 5\,/\text{ccm}$, $T = 180,000\,\text{K}$
  - $B_z = 5\,\text{nT}$ (északi IMF) átfordul $B_z = -5\,\text{nT}$ -ba (déli)
  - Tartomány: $256\,R_e \times 128\,R_e \times 128\,R_e$
  - Rács: 4468 blokk, 285952 darab $0.25 - 8\,R_e$ méretű cella
- **Gép**
  - 16 Athlon (800 MHz) processzorból álló Linux klaszter
  - 100 Mb/s Ethernet switch összeköttetés

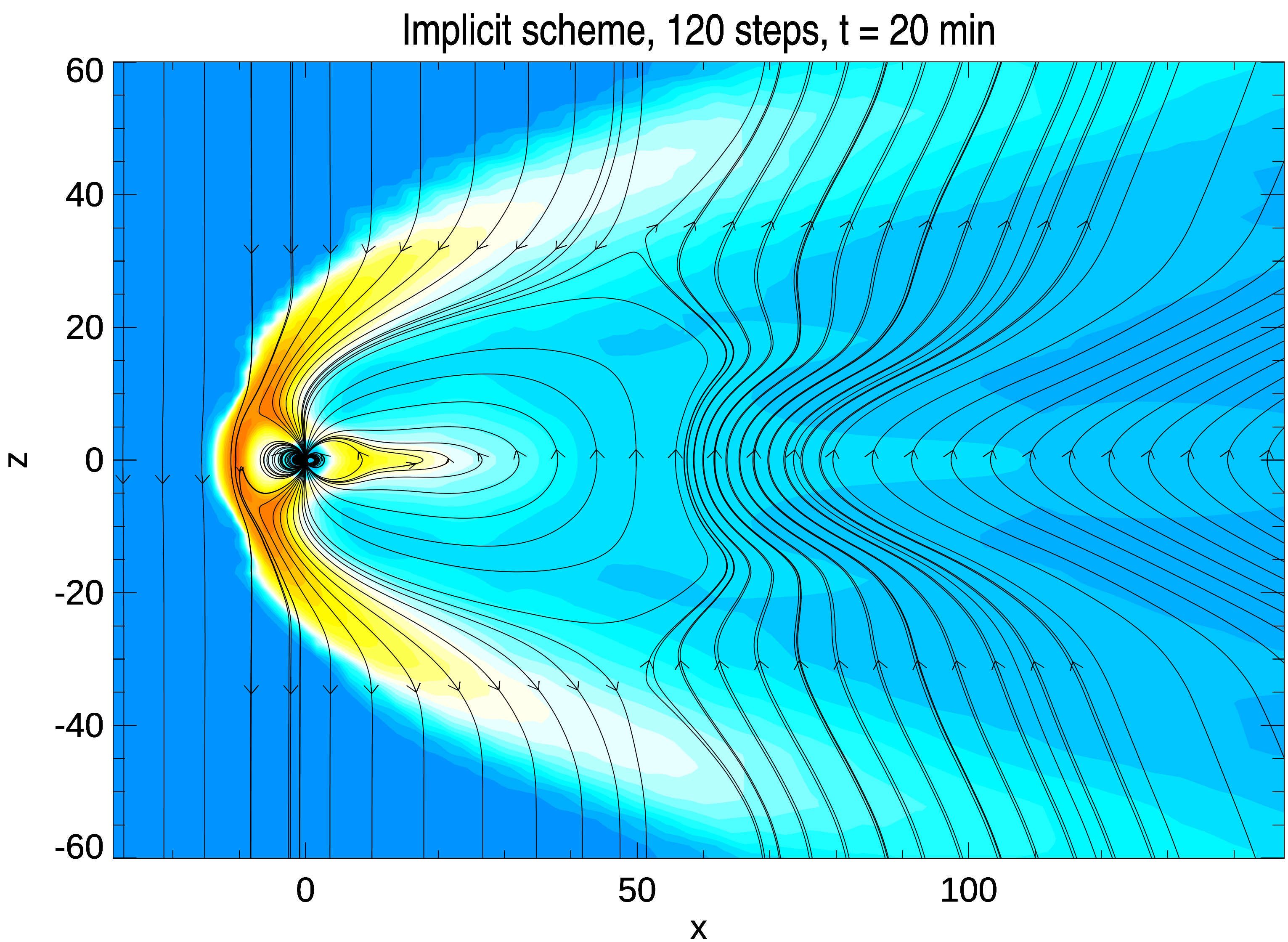
B és $\log p$ az $y = 0$ síkban



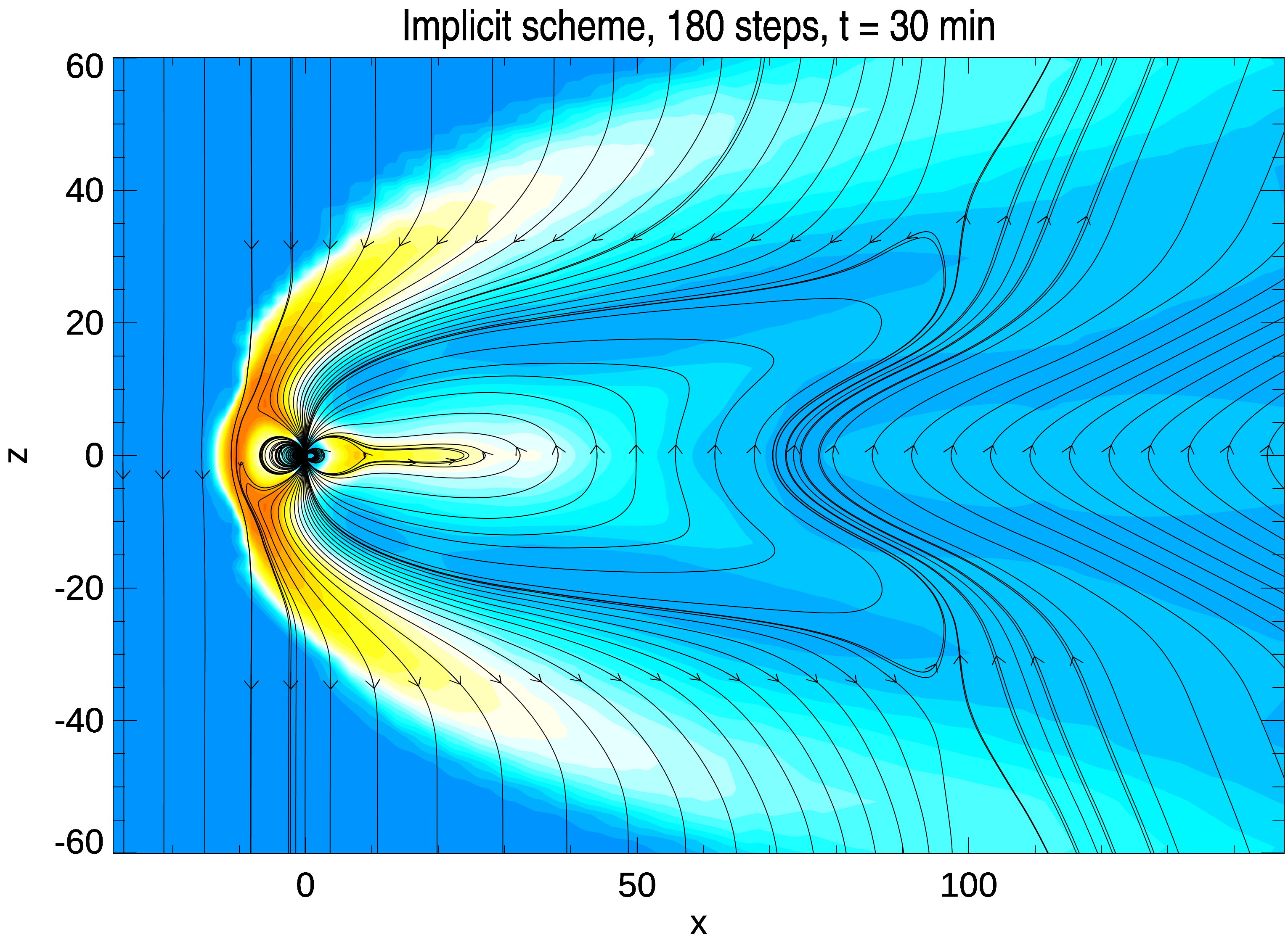
B és $\log p$ az $y = 0$ síkban



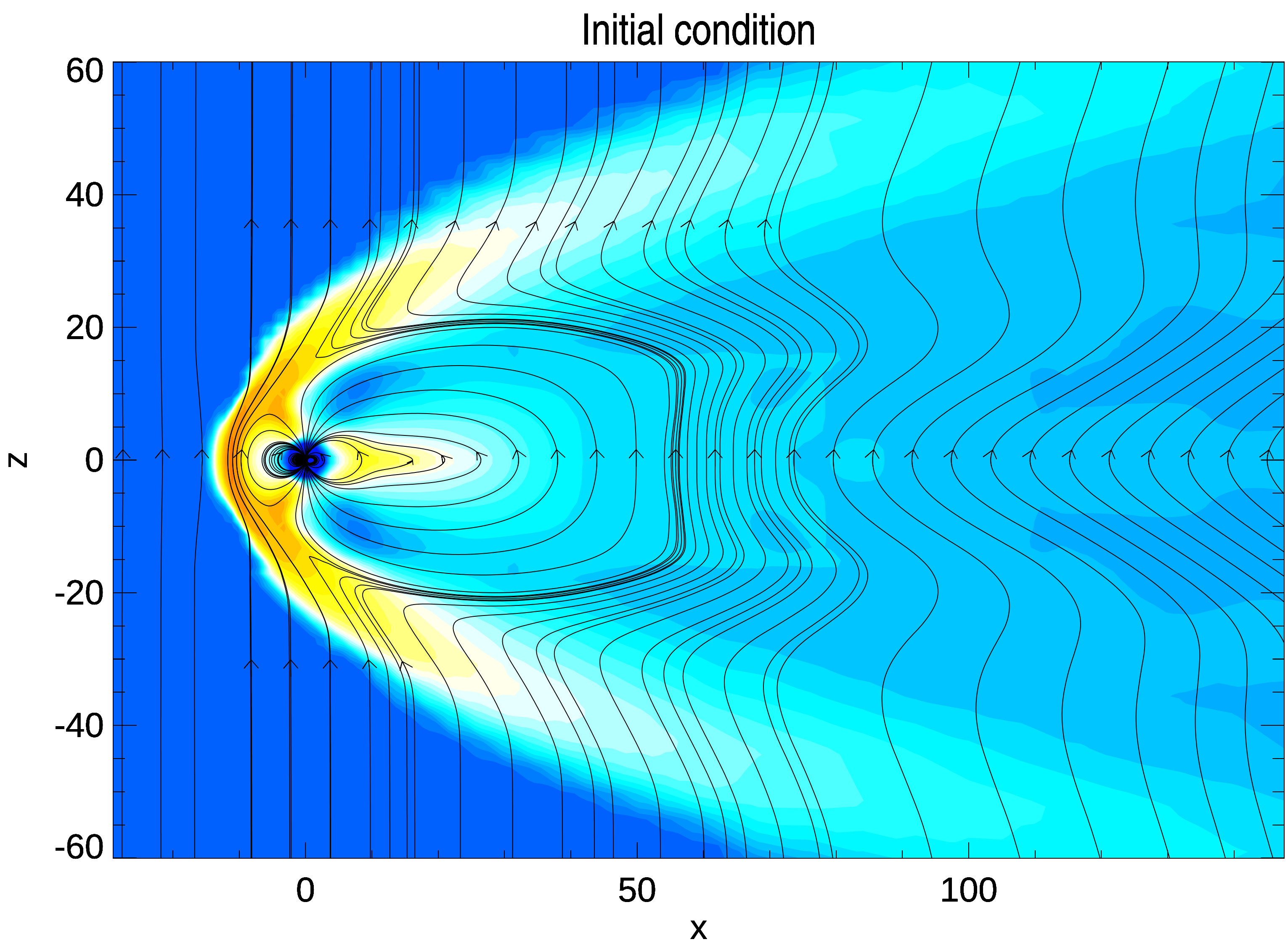
B és $\log p$ az $y = 0$ síkban



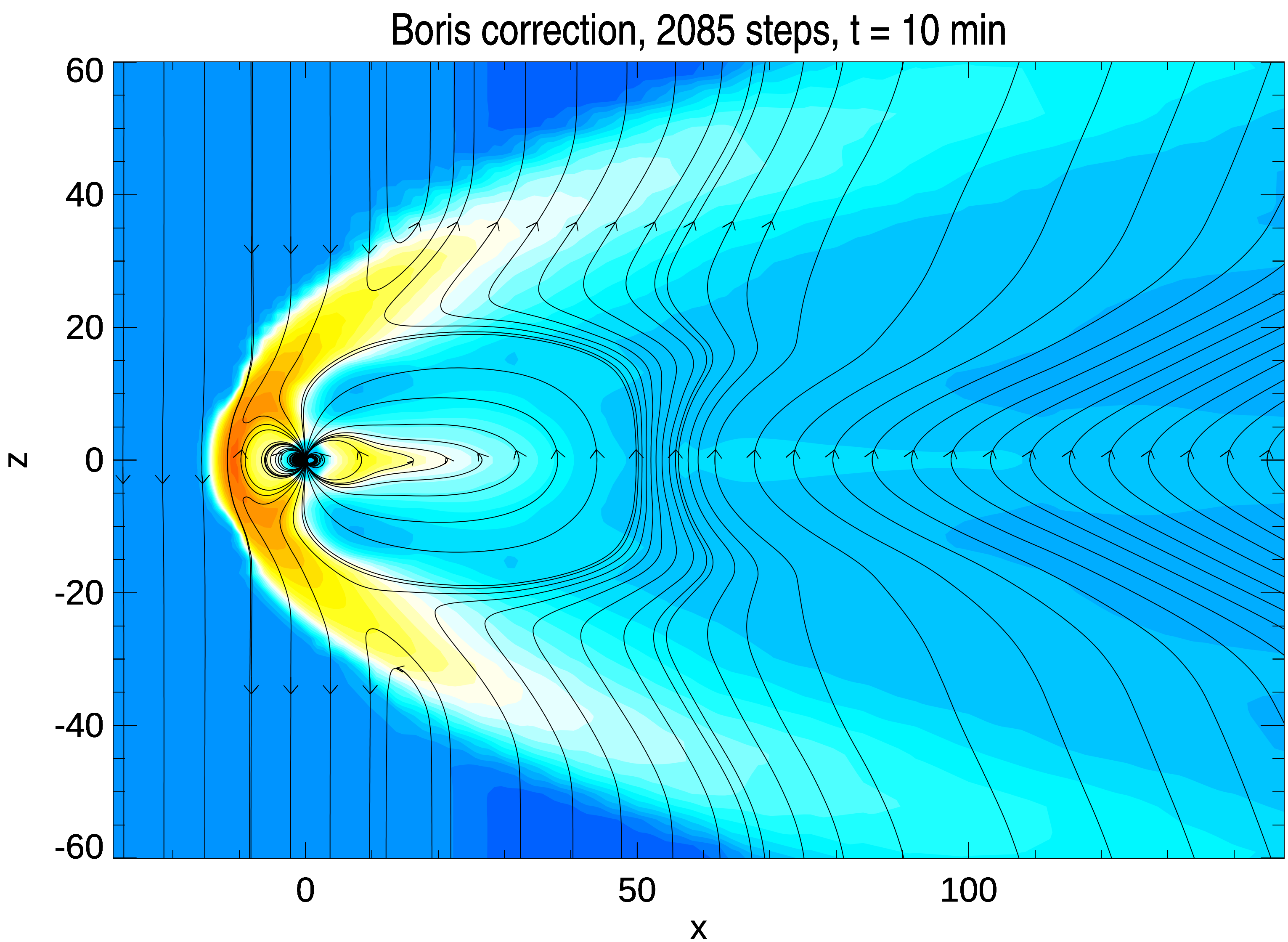
B és $\log p$ az $y = 0$ síkban



B és $\log p$ az $y = 0$ síkban

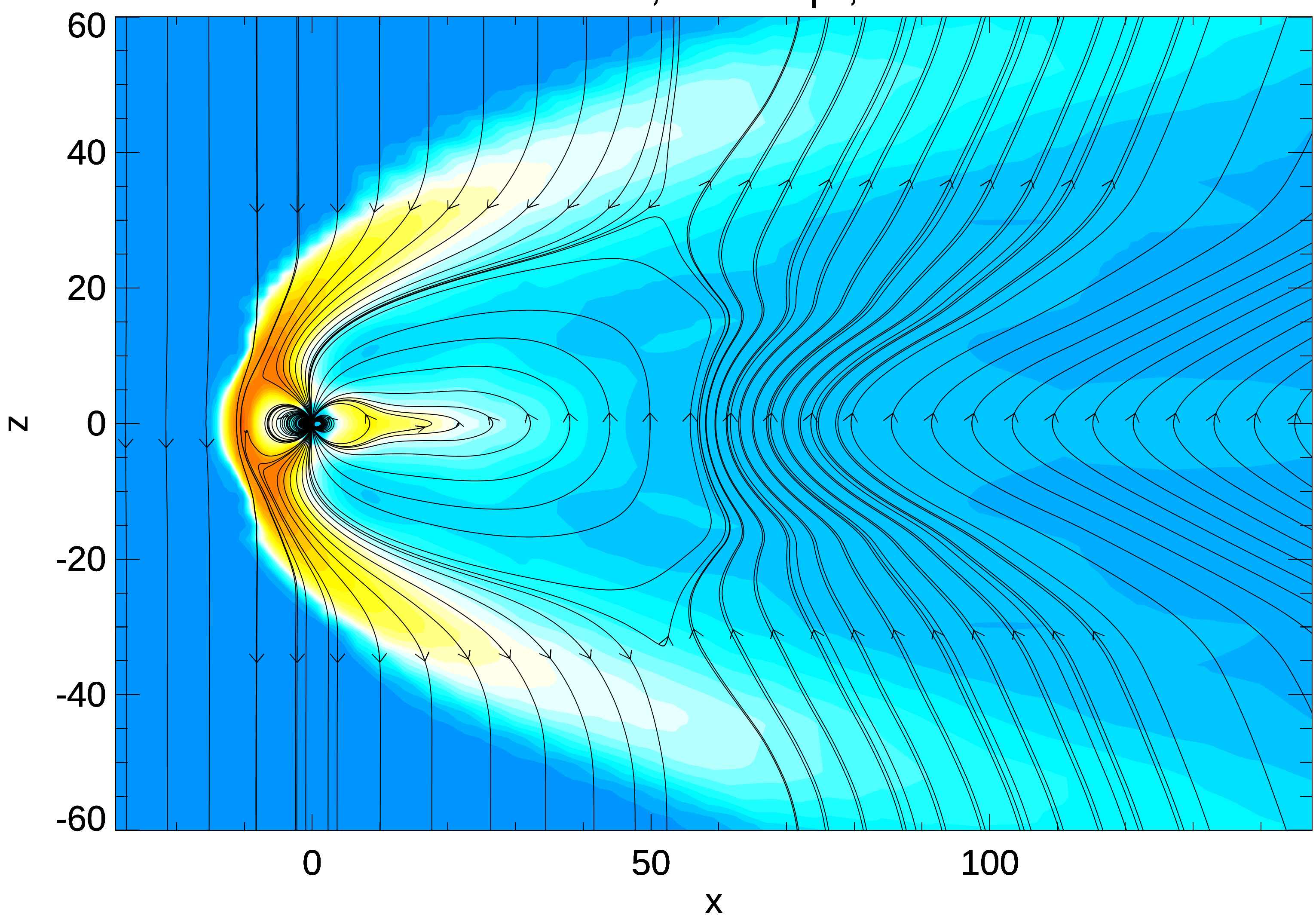


B és $\log p$ az $y = 0$ síkban

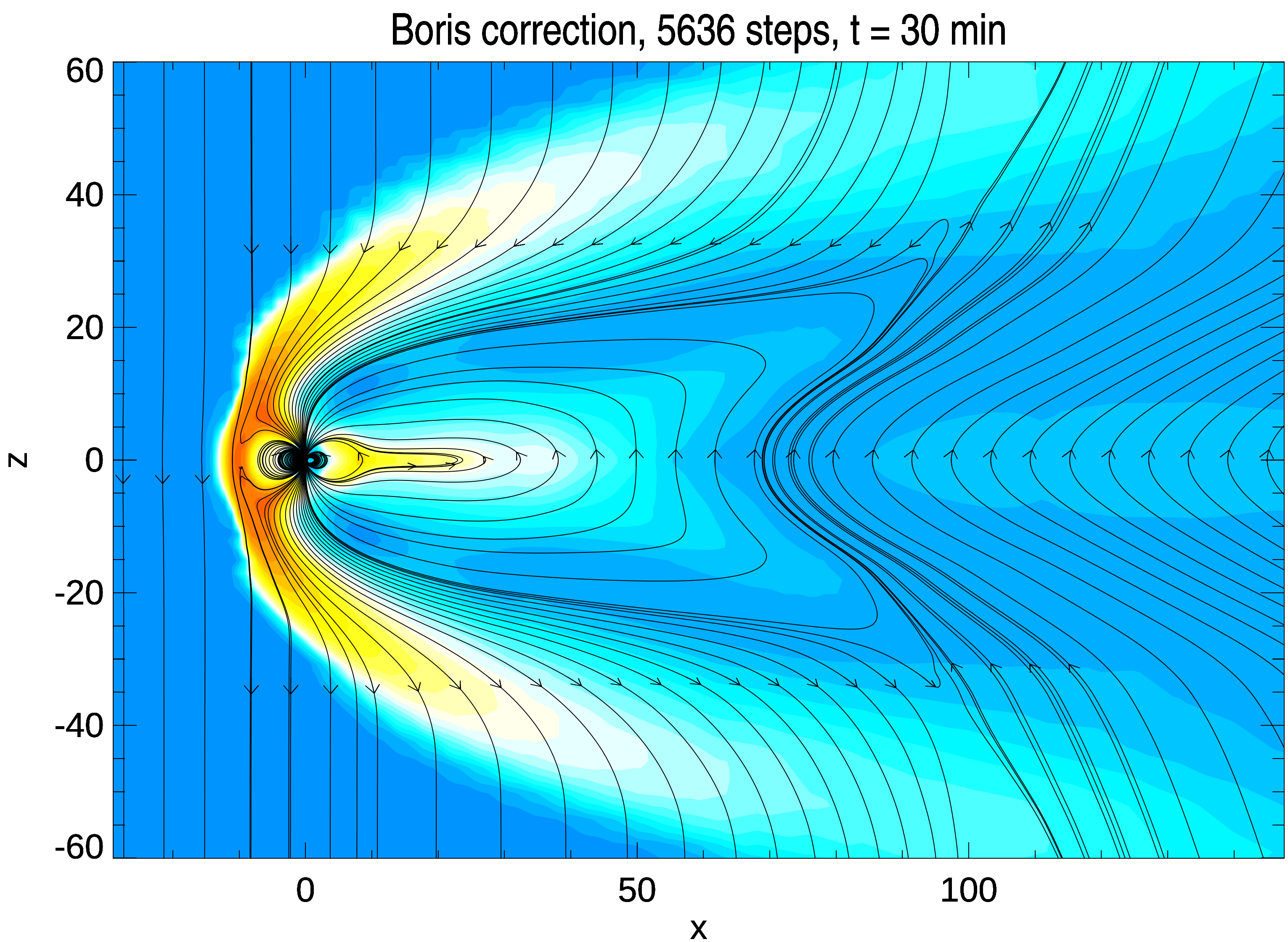


B és $\log p$ az $y = 0$ síkban

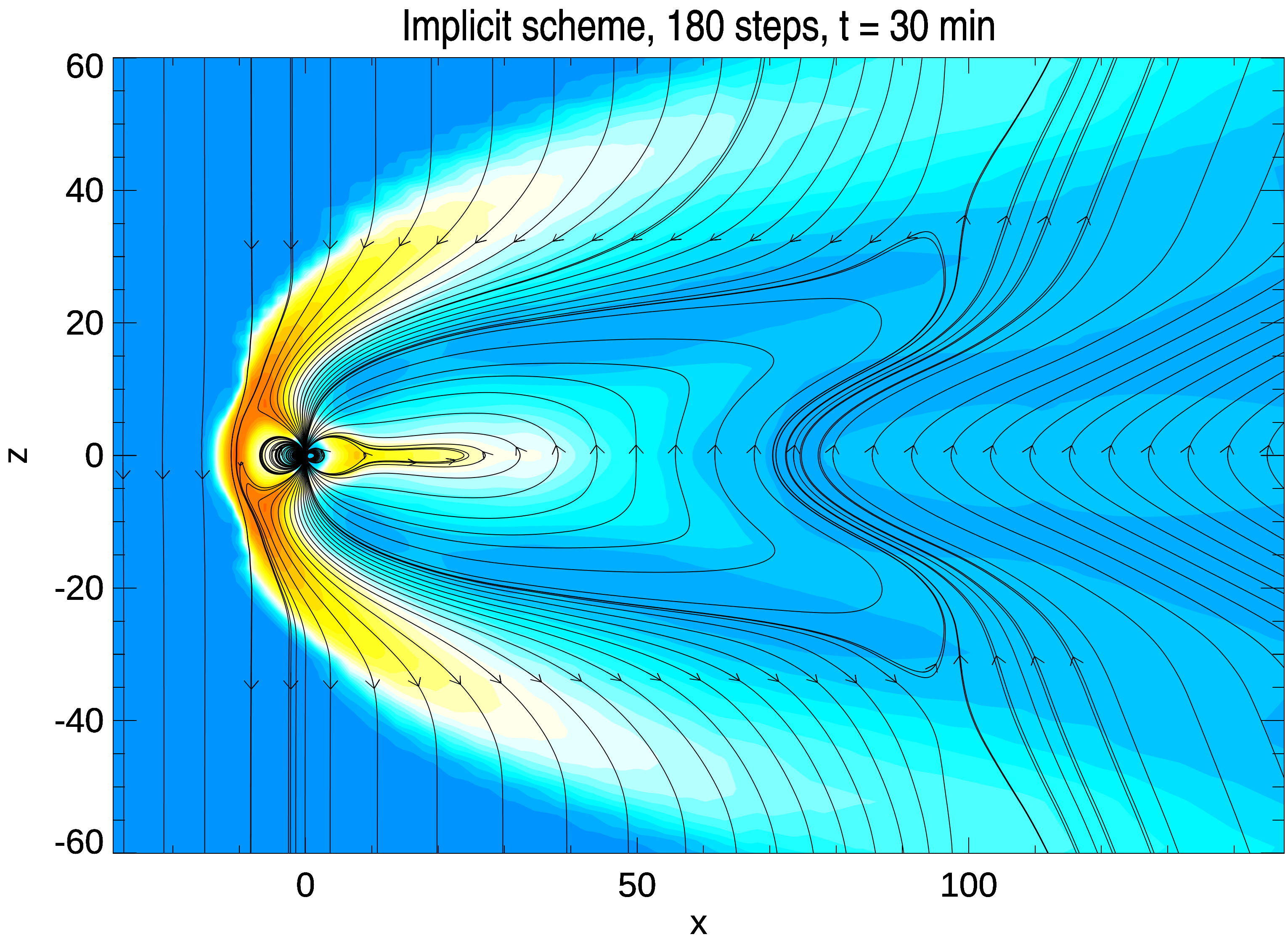
Boris correction, 4168 steps, t = 20 min



B és $\log p$ az $y = 0$ síkban



B és $\log p$ az $y = 0$ síkban



Futási sebesség

Módszer	időlépés [s]	CPU [s]	valós/CPU
Explicit	0.011	2.08	0.5%
Boris ($c' = c/200$)	0.284	2.87	9.9%
Implicit	2.000	31.63	6.3%
Implicit	10.000	46.54	21.5%
Részben implicit	2.000	8.94	22.4%

Az implicit módszer párhuzamos hatékonysága

- **Rögzített méretű probléma**
  - Rács: 4468 blokk, 285952 cella
- **Párhuzamos számítógép**
  - Origin 2000
  - dedikált processzorok
  - kommunikáció MPI könyvtárral
- **Egy lépésre fordított idő**

Proc.	CPU [s]	Sebesség	Hatékonyság
8	109.5	1.00	
16	58.3	1.88	94%
64	16.7	6.56	82%

Konklúzió

- **Eredmények**
  - Szemirelativisztikus MHD egyenletek analízise és implementációja
  - Parallel implicit időintegrálási módszer sikeres implementációja
  - Valós idő 20%-val futó szimuláció 1/4R_e-s rács felbontással egy kis Linux klaszteren
  - Az implicit módszer párhuzamos hatékonysága jó
- **Tanulságok**
  - Durva rácsfelbontásnál a Boris és az implicit módszerek hatékonysága hasonló
  - Finomabb rácson az implicit módszer várhatóan hatékonyabb a Boris-nál
- **Tervek**
  - További tesztelés és optimalizálás
  - Részletesebb összehasonlítás
  - Publikációk (JCP, JGR)